Sei A ein kommutativer Ring und seien $I, J \subset A$ Ideale. Dann sind auch

$$\begin{aligned} I + J &= \{i + j \,|\, i \in I, j \in J\} \ , \\ I \cdot J &= \{\textstyle\sum_\alpha i_\alpha j_\alpha \,|\, i_\alpha \in I, j_\alpha \in J\} \ , \\ I \cap J & \end{aligned}$$

Ideale in A. Es gilt $I \cdot J \subset I \cap J$ (Warum?).

I, J heißen *teilerfremd*, falls $I + J = A$. Z.B. für $A = \mathbb{Z}$ sind die Ideal $m\mathbb{Z}$ und $n\mathbb{Z}$ teilerfremd (also $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$), genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

Lemma. Sind I, J teilerfremd, so gilt $I \cdot J = I \cap J$.

Beweis. Es bleibt zu zeigen, dass $I \cdot J \supset I \cap J$. Da $I + J = A$, können wir $i \in I$ und $j \in J$ finden, so dass $i + j = 1$. Für $x \in I \cap J$ gilt $x = x1 = x(i + j) = xi + xj \in I \cdot J$. □

Satz. Sei A ein kommutativer Ring und seien $I_1, \ldots, I_n$ paarweise teilerfremde Ideale in A. Dann induziert der Ringhomomorphismus

$$\varphi : A \longrightarrow A/I_1 \times \cdots \times A/I_n \quad , \quad a \mapsto (a + I_1, \cdots, a + I_n)$$

einen Ringisomorphismus

$$\bar{\varphi} : A/\prod_{i=1}^{n} I_i \longrightarrow A/I_1 \times \cdots \times A/I_n \ .$$

Beweis.

1. *I_i und $\prod_{j \neq i} I_j$ sind teilerfremd:*

   Per Annahme sind I_j und I_i teilerfremd für $j \neq i$. Somit gibt es $x_j \in I_j$ und $y_j \in I_i$ mit $x_j + y_j = 1$. Damit folgt

   $$1 = \prod_{j \neq i} (x_j + y_j) = \prod_{j \neq i} x_j \ + \ (\text{Terme mit mindestens einem Faktor } y_j) \ .$$

   Der erste Summand liegt in $\prod_{j \neq i} I_j$ und jeder Summand in der restlichen Summe liegt in I_i (da $y_j \in I_i$). Daher $1 \in (\prod_{j \neq i} I_j) + I_i$.

2. *$\prod_{i=1}^{n} I_i = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$:*

   Per Induktion über n. Für $n = 2$ ist dies die Aussage des Lemmas. Die Aussage gelte nun für $n - 1$. Nach Teil 1 sind I_n und $\prod_{j \neq n} I_j$ teilerfremd. Nach dem Lemma gilt daher $I_n \cdot \prod_{j \neq n} I_j = I_n \cap \prod_{j \neq n} I_j$. Nach Induktionsvoraussetzung ist ferner $\prod_{j \neq n} I_j = \bigcap_{j \neq n}^{n} I_j$.

3. $\ker\varphi = \prod_{i=1}^{n} I_i$*:*

   Per Definition von φ gilt $\ker\varphi = \bigcap_{i=1}^{n} I_i$. Damit folgt die Behauptung aus Teil 2.

4. φ *ist surjektiv:*

   Seien $a_1, \ldots, a_n \in A$ gegeben. Wir zeigen, dass es $x \in A/\prod_i I_i$ gibt, mit $\varphi(x) = (a_1 + I_1, \ldots, a_n + I_n)$. Für jedes $i = 1, \ldots, n$ gibt es nach Teil 1 $u_i \in I_i$ und $v_i \in \prod_{j \neq i} I_j$ mit $u_i + v_i = 1$. Setze $x = \sum_{i=1}^{n} v_i a_i$. Für jedes $k = 1, \ldots, n$ gilt

   $$x + I_k = v_k a_k + I_k = (1 - u_k)a_k + I_k = a_k + I_k \ ,$$

   da $v_i \in I_k$ für $i \neq k$, und da $u_k \in I_k$.

Da $A/\ker\varphi \cong \mathrm{im}\varphi$ als Ringe (2.1, Kor. 2), mit Isomorphismus $\bar{\varphi}$, folgt der Satz aus Teil 3 und 4. □

Korollar. (Chinesischer Restsatz)
Seien $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}_{>0}$ paarweise teilerfremd (d.h. $\mathrm{ggT}(m_i, m_j) = 1$ für $i \neq j$). Dann ist

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/(m_1 \cdots m_n\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z} \\ x + m_1 \cdots m_n\mathbb{Z} &\longmapsto (x + m_1\mathbb{Z}, \cdots, x + m_n\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

wohldefiniert und ein Ringisomorphismus.